Opción A

Ejercicio 1 de la Opción A del modelo 5 de 2001.

[2'5 puntos] Calcula una primitiva de la función f definida por $f(x) = \dfrac{2x^2+10x}{x^2+2x-3}$ para $x \neq 1$ y $x \neq -3$.

Solución

Como $f(x) = \dfrac{2x^2+10x}{x^2+2x-3}$ tiene igual grado numerador y denominador para calcular una primitiva al ser un integral racional primero tenemos que efectuar la división para obtener el cociente y el resto.

$2x^2+10x$	x^2+2x-3
$-2x^2-4x+6$	2
$6x+6$	

$I = \int \dfrac{2x^2+10x}{x^2+2x-3}\,dx = \int (2)\,dx + \int \dfrac{6x+6}{x^2+2x-3}\,dx = 2x + I_1$; $x^2+2x-3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$

$\dfrac{6x+6}{x^2+2x-3} = \dfrac{6x+6}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+3} = \dfrac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)} \rightarrow 6x + 6 = A(x+3) + B(x-1)$

Si $x = 1 \rightarrow 12 = A(4) \rightarrow A = 3$

Si $x = -3 \rightarrow -12 = B(-4) \rightarrow B = 3$

$I_1 = \int \dfrac{6x+6}{x^2+2x-3}\,dx = \int \dfrac{A}{x-1}\,dx + \int \dfrac{B}{x+3}\,dx = A\cdot Ln|x-1| + B\cdot Ln|x+3| = 3\cdot Ln|x-1| + 3\cdot Ln|x+1|$

Luego $I = 2x + I_1 = 2x + 3\cdot Ln|x-1| + 3\cdot Ln|x+1| + K$

Ejercicio 2 de la Opción A del modelo 5 de 2001.

[2'5 puntos] Considera la función $f : R \rightarrow R$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} 3ax+b & \text{si } x \leq 0 \\ e^{x(ax+b)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Determina a y b sabiendo que f es derivable.

Solución

Como f(x) es derivable también es continua, en particular en x = 0

Como es continua en $x = 0 \rightarrow f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} (3ax+b) = b$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} (e^{x(ax+b)}) = e^0 = 1$

Por tanto igualando b = 1

Como f(x) es derivable en $x = 0 \rightarrow f'(0^+) = f'(0^-)$

$f'(x) = \begin{cases} 3a & \text{si } x \leq 0 \\ e^{x(ax+b)} \cdot [(ax+b)+x(a)] & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 4} \lim_{x\to 0} (e^{x(ax+b)})[(ax+b)+x(a)] = e^0(b) = 1\cdot b = b$

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0} (3a) = 3a$

Como $f'(0^+) = f'(0^-)$, tenemos que 3a = b, y de la continuidad tenemos que 3a = 1. Luego a = 1/3.

Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 5 de 2001.

Considera $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -m \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) [1 punto] ¿Para que valores de m tiene inversa la matriz A?

(b) [1'5 puntos] Resuelve, para m = 2, el sistema de ecuaciones AX = C.

Solución

$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -m \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(a)

Para que exista A^{-1} $\det(A) = |A| \neq 0$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -m \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \{ (1^aF+2^aF \text{ y } 1^aF(2) + 3^aF) \} = \begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ m+2 & 0 & -m+1 \\ 2m+3 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-1)\cdot\begin{vmatrix} m+2 & -m+1 \\ 2m+3 & 0 \end{vmatrix} = -(-m+1)(2m+3) = (m-1)(2m+3)$$

$(m-1)(2m+3) = 0 \rightarrow$ m-1= 0 de donde m = 1 y 2m+3 = 0 de donde m = -3/2

por tanto existe A^{-1} si $m \neq 1$ y $m \neq -3/2$

(b)

Si m = 2 el sistema AX = C es $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Como para m = 2, |A| =(m-1)(2m+3) = (1)(7) = 7 ≠ 0 luego existe A^{-1} . Multiplicamos AX = C por la izquierda por A^{-1}

$A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow I\cdot X = A^{-1}C \rightarrow X= A^{-1}C$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \text{Adj}(A^t)\ ;\quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -7 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

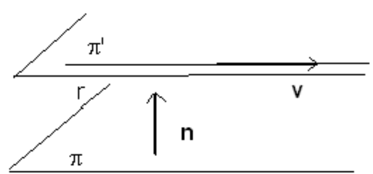
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \text{Adj}(A^t) = (1/7)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -7 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X= A^{-1}C \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1/7)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -7 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1/7)\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 \\ -5/7 \\ -1/7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la Opción A del modelo 5 de 2001

[2'5 puntos] Determina la recta que no corta al plano de ecuación x – y + z = 7 y cuyo punto mas cercano al origen es (1,2,3).

Solución



Como la recta r no corta al plano π la recta r ha de ser paralela al plano π luego su vector director **v** es perpendicular al vector normal del plano **n** = (1,-1,1)

Consideramos el plano π' paralelo al dado pero que contenga a la recta r

$\pi' \equiv x - y + z = k$. Como contiene al punto A(1,2,3)

(1) – (2) + (3) = k de donde k = 2, es decir $\pi' \equiv x - y + z = 2$

Consideramos ahora el plano π'' mas próximo al origen que pasa por el punto (1,2,3). Este plano tiene como vector normal **n''** = (1,2,3) luego su ecuación es

$\pi'' \equiv (1)(x-1)+(2)(y-2)+(3)(z-3) = x+2y+3z - 14 = 0$

La recta pedida r es la intersección de los planos π' y π'' , es decir

$$r \equiv \begin{cases} x-y+z-2=0 \\ x+2y+3z-14=0 \end{cases}$$

Opción B

Ejercicio 1 de la Opción B del modelo 5 de 2001.

Sea f : R → R la función definida por $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ y sea r la recta de ecuación 2x + y = 6.

(a) [1'5 puntos] Determina, si es posible, un punto de la gráfica de f en el que la recta tangente sea r.

(b) [1 punto] ¿Hay algún punto de la gráfica de f en el que la recta normal a la gráfica sea r? Justifica la respuesta.

Solución

(a)

$f(x) = x^3 – 5x^2 + 5x + 3$ y sea r la recta de ecuación $2x + y = 6$.
La pendiente de la recta es y ' = -2
Veamos don se cortan f(x) y la recta
$x^3 – 5x^2 + 5x + 3 = -2x + 6 \rightarrow x^3 – 5x^2 + 7x - 3 = 0$
Por Ruffinni

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 7 & -3 \\ 1 & & 1 & -4 & -3 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & |\,0 \end{array}$$

$x^3 – 5x^2 + 7x - 3 = (x-1)(x^2 -4x+3) = 0$
de $x-1 = 0$ tenemos $x = 1$
de $x^2 -4x+3 = 0$ tenemos $x = 1$ y $x = 3$

Vamos a calcular las rectas tangentes a f(x) en x = 1 y x = 3
Recta tangente en x = 1 $\rightarrow$ y - f(1) = f '(1)(x-1)
$f(x) = x^3 – 5x^2 + 5x + 3 \rightarrow f(1) = 4$
$f'(x) = 3x^2 – 10x + 5 \rightarrow f'(1) = - 2$
La recta tangente en x = 1 es y – 4 = (-2)(x-1). Operando y = -2x + 6, que es la que me han dado

Recta tangente en x = 3 $\rightarrow$ y - f(3) = f '(3)(x-3)
$f(x) = x^3 – 5x^2 + 5x + 3 \rightarrow f(3) = 0$
$f'(x) = 3x^2 – 10x + 5 \rightarrow f'(3) = 2$
La recta tangente en x = 3 es y – 0 = (2)(x-3). Operando y = 2x – 6.
(b)
Para que la recta dada y = -2x + 6 fuese normal a f(x) en x = 1 o x = 3, como la recta normal tiene de ecuación en x = a y – f(a) = (-1/f '(a))(x-a) la pendiente de la recta tendría que ser
(-1/f '(1)) = (-1/-2) = 1/2 , que no coincide con -2 que es la pendiente de la recta dada o
(-1/f '(3)) = (-1/2) = -1/2 , que tampoco coincide con -2 que es la pendiente de la recta dada, por tanto la recta dada no puede ser normal a f(x) en x = 1 o x = 3.

Ejercicio 2 de la Opción B del modelo 5 de 2001.

Considera la curva de ecuación $y = \dfrac{x^3+2x}{x^2-2x-3}$.
(a) [1'5 puntos] Determina sus asíntotas.
(b) [1 punto] ¿Corta la curva a alguna de sus asíntotas en algún punto? Justifica la respuesta.

Solución

(a)
$f(x) = \dfrac{x^3+2x}{x^2-2x-3}$
Como es un cociente de funciones polinómicas las posibles asíntotas verticales (A.V.) son los números que anulan el denominador si al calcular su límite nos resulta ∞
$x^2 -2x – 3 = 0$. Resolviendo nos queda x = - 1 y x = 3
Como
Como $\lim_{x\to -1^+} \dfrac{x^3+2x}{x^2-2x-3} = \dfrac{-3}{0^-} = +\infty$, x = -1 es una A.V. de f(x)
Como $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{x^3+2x}{x^2-2x-3} = \dfrac{33}{0^+} = +\infty$, x = 3 es una A.V. de f(x)
La función no corta a sus asíntotas verticales porque en dichos puntos la función no está definida.

Tiene una asíntota oblicua (A.O.) y = mx + n porque es una cociente con el numerador de grado una unidad más que el denominador, con

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x}{x^3-2x^2-3x} = 1 \qquad n = \lim_{x\to\infty} (f(x) – mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+2x}{x^2-2x-3} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+2x-x^3+2x^2+6x}{x^2-2x-3}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+8x}{x^2-2x-3}\right) = 2.$$ luego la A.O. es y = mx + n = x + 2, que es la misma en $\pm\infty$ por ser un cociente de funciones polinómicas. Se puede hacer rápidamente dividiendo numerador entre denominador, y la A.O. es el cociente.

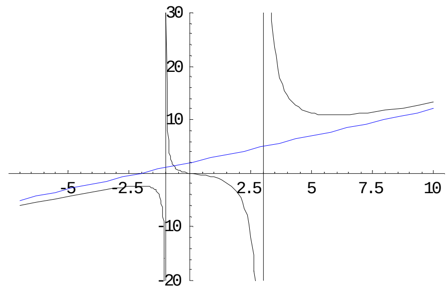
$$\begin{array}{l|l} x^3+2x & x^2-2x-3 \\ \cline{2-2} -x^3+2x^2+3x & x+2 \\ \cline{1-1} 2x^2+5x & \\ -2x^2+4x+6 & \\ \cline{1-1} \quad 9x+6 & \end{array}$$

Para ver si la función corta a la asíntota oblicua resolvemos el sistema

$$\frac{x^3+2x}{x^2-2x-3} = x+2 \rightarrow x^3+2x = x^3-2x^2-4x+2x^2-3x-6 \rightarrow 9x=-6 \rightarrow x=-6/9=-2/3$$

La función f(x) y la A.O. se cortan en el punto (-2/3, 4/3)

Aunque no la piden la gráfica es



Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 5 de 2001.

Denotamos por M^t a la matriz traspuesta de una matriz M. Considera

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\ B=(1\ \ 4\ \ 3)\ \text{ y }\ C=\begin{pmatrix}0&4&-3\\-2&9&-6\\1&-4&4\end{pmatrix}.$$

(a) [1'5 puntos] Calcula $(AB)^t$ y $(BA)^t$.

(b) [1 punto] Determina una matriz X que verifique la relación $1/2\cdot X+(AB)^t=C$.

Solución

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\ B=(1\ \ 4\ \ 3)\ \text{ y }\ C=\begin{pmatrix}0&4&-3\\-2&9&-6\\1&-4&4\end{pmatrix}.$$

(a)

$$AB=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}(1\ \ 4\ \ 3)=\begin{pmatrix}1&4&3\\2&8&6\\-1&-4&-3\end{pmatrix};\ (AB)^t=\begin{pmatrix}1&2&-1\\4&8&-4\\3&6&-3\end{pmatrix};\ BA=(1\ \ 4\ \ 3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=(1+8-3)=(6)$$

$(BA)^t=(6)$

(b)

$1/2\cdot X+(AB)^t=C$

$$1/2\cdot X+\begin{pmatrix}1&2&-1\\4&8&-4\\3&6&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&-3\\-2&9&-6\\1&-4&4\end{pmatrix}$$

$$1/2\cdot X=-\begin{pmatrix}1&2&-1\\4&8&-4\\3&6&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&4&-3\\-2&9&-6\\1&-4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&-2\\-6&1&-2\\-2&-10&7\end{pmatrix};\ X=2\begin{pmatrix}-1&2&-2\\-6&1&-2\\-2&-10&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4&-4\\-12&2&-4\\-4&-20&14\end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la Opción B del modelo 5 de 2001.

[2'5 puntos] Sabiendo que las rectas $r\equiv\begin{cases}x+y-z=1\\x-y=2\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}x-2y-z=a\\2x+z=a\end{cases}$ se cortan, determina a y el punto de corte.

Solución

Como las recta nos las han dado en forma implícita como intersección de dos planos cada una, discutiremos y resolveremos el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas

$x+y-z=1$

$x-y=2$

$x-2y-z=a$

$2x+z=a$

sabiendo que para que se corten rango(M) = rango(M^*) = 3 por el teorema de Rouche, siendo

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & a \\ 2 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ la matriz ampliada

En M como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ = { (3ªF – 1ªF) } = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ $(-1)(-3) = 3 \neq 0$, rango (M) = 3

En M^* para que rango(M^*) = 3, $|M^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & a \\ 2 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$ ={(4ªF+3ªF y 4ªF+1ªF)} =

$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & a+1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 2a \\ 2 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = (1)(-1)\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & a+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2a \end{vmatrix}$ = {(2ªF+1ªF y 3ªF+(2)1ªF)} = $-1\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & a+1 \\ 4 & 0 & a+3 \\ 9 & 0 & 4a+2 \end{vmatrix} =$

$= (-1)(1)(-1)(16a+8-9a-27) = 7a - 19 = 0 \rightarrow a = 19/7$ para que las rectas se corten.

Para obtener el punto de corte resolvemos el sistema que nos queda con a = 19/7, y como rango(M) = rango(M^*) = 3 solo tenemos 3 ecuaciones y 3 incógnitas principales. Nos quedamos con las tres primeras ecuaciones

$x + y - z = 1$
$x - y \quad = 2$ $\rightarrow$ 2ª - 1ª
$x - 2y - z = 19/7$ $\rightarrow$ 3ª - 1ª

Con lo cual nos queda
$x + y - z = 1$
$0 - 2y + z = 1$
$0 - 3y + 0 = 19/7 - 1 = 12/7 \rightarrow y = -4/7$
$(-2)(-4/7) + z = 1 \rightarrow z = -1/7$
$x + (-4/7) + (-1/7) = 1 \rightarrow x = 10/7$

Las recta se cortan en el punto (x,y,z) = (10/7, -4/7, -1/7)